

Modèles pour la transition fluide/solide dans les écoulements gravitaires en couche mince

François Bouchut (LAMA)

Alexandre Ern (CERMICS)

Christelle Lusso

Université Paris Est - CERMICS

mai 2012

Plan

1 Modèle

2 Cas monodimensionnel

- Modèle
- Résultats numériques

3 Cas bidimensionnel

- Méthode ALE
- Résultats numériques

Motivations :

- Modélisations d'écoulements de débris, d'avalanches,
- Etude de la transition fluide/solide dans un fluide à deux états.

Cadre :

- Dynamique en couche mince avec partie immobile au fond et mobile en surface.



Fig.: avalanche



Fig.: écoulement de lave

Equations du modèle

- Fluide visco-plastique non newtonien incompressible :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} + \operatorname{div} P = -\vec{g}, \end{cases}$$

- Loi de type Bingham

$$P = p \operatorname{Id} - \left(\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{|D\vec{U}|} \right),$$

avec $D\vec{U} = \frac{\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^t}{2}$ et \vec{U} la vitesse du fluide.

- Relation de Drucker-Prager $\kappa = \sqrt{2} \lambda p$.
- Conditions aux limites et condition initiale
- $P \cdot \vec{N} = 0$ à la surface libre.

Géométrie

- Le domaine Ω_t dépend du temps (surface libre),
- interface solide/fluide entre les deux phases, caractérisées par $D\vec{U}$ nul ou $D\vec{U}$ non nul,
- fond fixe.

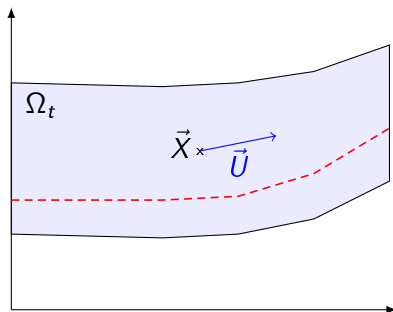


Fig. : Domaine dépendant du temps.

Modélisation unidimensionnelle

- développement asymptotique en couche mince,
- introduction de l'inconnue $b(t)$ qui représente la position de l'interface,
- introduction d'un terme source empirique de friction et gravité :

$$\begin{cases} \partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U = 0 \text{ pour } b(t) < Z < h, \\ \partial_Z U(t, h) = 0, \\ U(t, b(t)) = 0, \\ \partial_Z U(t, b(t)) = 0. \end{cases}$$

avec $\partial_Z U > 0$ et $\partial_Z S < 0$.

- U est prolongé par 0 sur $[0, b(t)]$,
- la condition aux limites redondante en $Z = b(t)$ donne l'évolution de $b(t)$.

Méthodes numériques

première méthode :

- changement de variables : $[b(t), h] \ni Z \mapsto Y \in [0, 1]$,

$$\partial_t U - \frac{\dot{b}(1-Y)}{h-b} \partial_Y U + S - \frac{\nu}{(h-b)^2} \partial_{YY}^2 U = 0,$$

- discrétisation par différences finies en espace,
- Euler implicite pour la diffusion, Euler explicite avec CFL pour le transport,
- à b^{n+1} fixé, Dirichlet en $Y = 0$ et Neumann en $Y = 1$ donnent $U^{n+1}(b^{n+1})$,
- Neumann en $Y = 0$ sur $U^{n+1}(b^{n+1})$ permet de déterminer b^{n+1} .

deuxième méthode :

- résolution d'un problème d'obstacle :
 $\min (\partial_t U + S - \nu \partial_{ZZ}^2 U, U) = 0$ sur $[0, h]$.
- discrétisation par différences finies en espace,
- Euler explicite pour l'EDP.

Etude de l'écoulement sur un plan incliné d'angle θ

- $S = \alpha = g(\sin \theta + \lambda \cos \theta) > 0$,
- lorsque $\nu \rightarrow 0$ la solution analytique $(U(t, Z), b(t))$ est connue :
 - ▶ $U(t, Z) = [Z - b0 - \alpha t]_+$ pour $0 < Z < h$,
 - ▶ $b(t) = \alpha t + b0$.

Compétition viscosité/friction

VISCOSITE ν



- applatit le profil de vitesse
→ décroissance de b .

FRICION S



- fait décroître la vitesse
→ croissance de b .

En temps long, les effets de friction l'emportent sur les effets visqueux.

Résultats pour différentes valeurs de ν

- S constant > 0
- $U_0(Z) = [Z - b_0]_+$ avec $b_0 = 3,5$

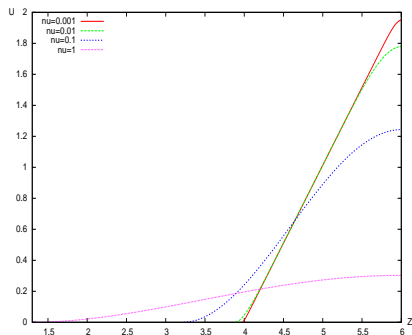


Fig.: profils de vitesse à $t = 5$.

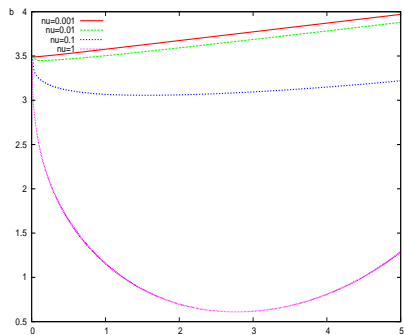
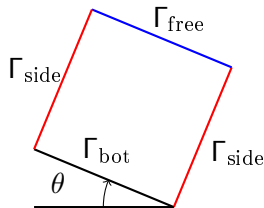


Fig.: évolution de $b(t)$.

Cas bidimensionnel

On veut résoudre le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} - \operatorname{div} P = f, \\ \operatorname{div} \vec{U} = 0, \\ \vec{U} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{bot}}, \\ \vec{U} \text{ est périodique sur } \Gamma_{\text{side}}, \\ P \cdot N = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{free}}. \end{array} \right.$$



avec $P = p \text{Id} - (\nu D\vec{U} + \kappa \frac{D\vec{U}}{|D\vec{U}|})$ et $\kappa = \sqrt{2}\lambda\rho$.

Condition d'écoulement : $\lambda > |\tan \theta|$.

Méthode ALE

Algorithme de marche en temps

- à l'instant t^n , on connaît \vec{U}^n , \vec{U}_f^n vitesse du domaine, et Ω^n ,
- calcul de (\vec{U}^{n+1}, p^{n+1}) en fonction de \vec{U}^n et \vec{U}_f^n ,
- calcul de la vitesse du domaine \vec{U}_f^{n+1} ,
- passer de Ω^{n+1} à Ω^{n+2} .

(1) C.Le Bris, J-F.Gerbeau, T.Lelièvre, *Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2006.

(2) A.Ern, R.Joubaud, T.Lelièvre, *Numerical study of a thin liquid film flowing down an inclined wavy plane*, Physica D, 2011.

Formulation variationnelle par régularisation

- trouver $(\vec{U}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ tels que

$$\int_{\Omega^{n+1}} \frac{\vec{U}_h^{n+1} - \vec{U}_h^n}{\Delta t} V_h + (\nabla \vec{U}_h^n (\vec{U}_h^n - \vec{U}_f^n)) \cdot V_h + \left(\nu + \frac{\kappa}{\sqrt{\|D(\vec{U}_h^n)\|^2 + \epsilon^2}} \right) D(\vec{U}_h^{n+1}) : D(V_h) \\ - \int_{\Omega^{n+1}} p_h^{n+1} \operatorname{div} V_h - \int_{\Omega^{n+1}} q_h \operatorname{div}(\vec{U}_h^{n+1}) - \int_{\Omega^{n+1}} f_h V_h = 0$$

pour tout (V_h, q_h) .

- Discrétisation par éléments finis de Taylor-Hood P2-P1.

Vitesse du domaine u_f^{n+1}

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(D(\vec{U}_f^{n+1})) = 0, \\ \vec{U}_f^{n+1} \cdot N = \vec{U}^{n+1} \cdot N \text{ sur } \Gamma_{\text{bot}}^{n+1} \cup \Gamma_{\text{free}}^{n+1}, \\ \vec{U}_f^{n+1} \cdot N = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{side}}^{n+1}, \\ (D(u_f^{n+1})N)_T = 0 \text{ sur } \partial\Omega^{n+1}. \end{array} \right.$$

Remarque : Au niveau discret on introduit un multiplicateur r pour imposer les C.L. au sens faible.

(3) I. Ionescu, *Onset and dynamic shallow flow of a viscoplastic fluid on a plane slope*, Journal of non-newtonian fluid mechanics, 2010.

Résultats numériques

Comparaison des profils de vitesse 1d et 2d, avec S constant et $\nu = 0.001$,
 paramètre de régularisation $\epsilon = 10^{-2}$,
 $\Delta t = 10^{-3}$, résolution 1D $\Delta Y = 10^{-2}$ et résolution 2D $\Delta Y = 10^{-1}$.

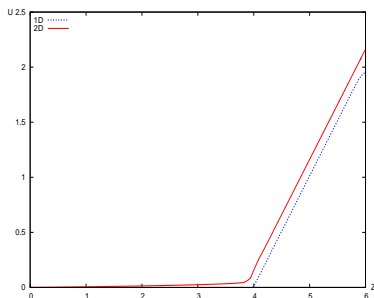


Fig.: profil de vitesse à $t = 5$.

Perspectives

- influence des paramètres opératoires (θ),
- influence des paramètres phénoménologiques (λ, ν),
- quitter le cadre périodique \rightarrow géométrie plus complexe.