Université de Marne la Vallée **Licence L2-SM**
2011/2012 **Algèbre**

3. Espaces Euclidiens

Exercice 1. Soient a et b deux réels, u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x, y) et (x', y'), et B l'application sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par

$$B(u, v) \ = \ xx' + 2xy' + ax'y + byy'.$$

1. A quelles conditions sur (a, b), B définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Préciser, pour $a = 2$ et $b = 5$, la norme définie par B.
3. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour cette norme.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien. Soit E le sous-espace vectoriel engendré par $u_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $u_2 = (-1, -1, 1, 1)$.
1. Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel orthogonal de E, noté $E^\perp$.
2. Soit $u = (1, 2, -1, -2)$. Décomposer u en la somme d'un élément de E et d'un élément de $E^\perp$. Vérifier le théorème de Pythagore.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (-2, 0, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 0, 1)$.
1. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Trouver une équation de H.
2. Trouver un vecteur unitaire orthogonal à H.
3. Soit s le symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à H. Trouver la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x + y + z + t = 0$ et soit p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur H.
1.Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^4$, calculer $\|u - p(u)\|$.
2. Trouver la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f et g appartiennent à E, on définit

$$< f|g >= \int_0^\pi f(t)g(t)dt.$$

1. Prouver qu'on a muni E d'un produit scalaire.
2. Prouver que pour tout $f \in E$ il existe un unique couple de réels (a, b) tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \int_0^\pi (f(t) - a - bt)^2 dt \leq \int_0^\pi (f(t) - x - yt)^2 dt.$$

3. Calculer a et b quand $f(t) = \cos t$.

Exercice 7. Soient $E = \mathbb{R}^3$, et

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis trouver par le procédé de Gram-Schmidt une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Soient $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire usuel, et $(e_1, e_2, \ldots.., e_p)$ une famille orthonormale de vecteurs de E. On considère une application f de E dans E vérifiant

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|.$$

1. Démontrer que $\forall (x, y) \in E^2, \quad < f(x),\ f(y) > = < x, y >$.
2. Démontrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots.., f(e_p))$ est orthonormale.
3. En déduire que l'application f est linéaire.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^3$, et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ce sont des matrices orthogonales.

Exercice 10. Trouver des matrices orthogonales P et Q telles que les matrices $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ sont diagonales,où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$