4. Endomorphismes d'un espace euclidien - Formes quadratiques.

Exercice 1. Soit E un espace euclidien. Montrer que toute projection orthogonale est un endomorphisme symétrique. En déduire que toute symétrie orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien. Montrer que toute symétrie orthogonale est une isométrie de E.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien et soit f un endomorphisme symétrique de E. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f. Soit u un vecteur propre associé à λ et soit v un vecteur propre associé à μ. Prouver que u et v sont orthogonaux.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation : $x+y+2z+3t=0$. Montrer que $f(H)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.
3. Trouver une équation de $f(H)$.

Exercice 5. Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(u) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 2yz \quad ; \quad u = (x, y, z).$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit φ la forme bilinéaire symétrique associée à q.
3. Donner l'expression de $\varphi(u, v)$ où $v = (x_1, y_1, z_1)$.
4. Utiliser l'algorithme des carrés de Gauss pour trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est diagonale. On explicitera les nouvelles coordonnées (x', y', z') en fonction de (x, y, z) et on écrira la matrice de q dans la nouvelle base.

Exercice 6. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(u) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 2xy - 4xz + 7yz$.

Exercice 7. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(u) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$.

Exercice 8. $E = \mathbb{R}^4$ et $q(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.

Exercice 9. $E = \mathbb{R}^3$ et $q(u) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 8xy - 8xz - 6yz$.