Algèbre 2 Travaux dirigés
$2^{\text{ème}}$ semestre 2011/2012.

1. Rappels : systèmes linéaires, rang, déterminants.

Exercice 1. Pour chacun des systèmes suivants :
1) écrire la matrice du système et le second membre;
2) résoudre le système dans $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss, et dans les cas où il existe des solutions, donner la structure de l'ensemble des solutions;
3) dans chacun des cas, déduire des calculs faits dans la question 2 le rang de la matrice du système, appelé aussi le rang du système. (On rappelle que la matrice obtenue après une opération élémentaire sur les lignes a le même rang que la matrice initiale).

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-2y &=& 5\\ -6x+3y &=& 1\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-3z &=& 5\\ 3x-2y+2z &=& 5\\ 5x-3y-z &=& 16\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z &=& -1\\ x-2y-z &=& 1\\ 2x-7y-8z &=& 2\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z &=& 1\\ x-2y-z &=& 1\\ 2x-7y-8z &=& 2\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+3z &=& 3\\ 3x+y-5z &=& 0\\ 4x-y+z &=& 3\\ x+3y-13z &=& -6\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y-3z &=& -1\\ 2x+y-2z &=& 1\\ x+y+z &=& 3\\ x+2y-3z &=& 1\end{array}\right.$$

Exercice 2. Soit m un nombre réel.
1) Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss, en discutant selon les valeurs du paramètre m.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz &=& 1\\ x+my+z &=& 1\\ mx+y+z &=& 1\end{array}\right.$$

2) Pour chaque valeur de m, déduire des calculs précédents le rang de la matrice du système. Dans le cas où la matrice du système est inversible, calculer sa matrice inverse.
3) Calculer le déterminant de la matrice du système. Retrouver les valeurs de m pour lesquelles la matrice est inversible.

Exercice 3. Soit m un nombre réel.
1. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & (m-2)\\ 2 & (m-4) & -2\\ (m+2) & -4 & -3\end{pmatrix}.$$

Ecrire la matrice échelonnée obtenue par la méthode du pivot de Gauss appliquée aux lignes de la matrice. En déduire le rang de A, en discutant suivant les valeurs de m.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit f l'application linéaire de E dans E telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} f(e_1) = & e_1+2e_2+(m+2)e_3\\ f(e_2) = & -e_1+(m-4)-4e_3\\ f(e_3) & =(m-2)e_1-2e_2-3e_3\end{array}\right.$$

Ecrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3). Quel est le rang de f ? Pour quelles valeurs de m f est-elle bijective ?
3. Pour chaque valeur de m, donner une base de $\operatorname{Im} f$. Pour quelles valeurs de m les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1\\ -3 & 2\end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 5\\ -1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 0 & -2 & 3\end{vmatrix}.$$

Exercice 5.

$$\text{Montrer, sans le calculer, que} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{est nul.}$$

Exercice 6.

$$\text{Montrer que} \quad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Exercice 7.

$$\text{Montrer que, pour } n \geq 3, \quad \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 8.

$$\text{Soit} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1) Etablir une relation entre Δ_n, Δ_{n-1} et Δ_{n-2}.

2) Montrer que $\Delta_n - \Delta_{n-1}$ est indépendant de n, et en déduire Δ_n.

Exercice 9. Résoudre en x les équations:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 10.

$$\text{On cherche à calculer} \quad D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{vmatrix}. \quad \text{1) P(x)} = \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}.$$

Montrer que le degré de P est ≤ 1. Evaluer $P(-a)$ et $P(-b)$.

2) En déduire D_n.

Exercice 11. Pour chaque réel x, on considère le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & x \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 2 & x & 0 & 1 \\ x & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

1) Montrer que $D(x)$ est un polynome. Déterminer son degré et le coefficient de son terme de plus haut degré.

Montrer, sans calculer $D(x)$, qu'il est divisible par

$$x+3, \qquad x-3, \qquad x+1, \qquad \text{et} \qquad x-1.$$

2) En déduire $D(x)$.