**Université Marne la Vallée** | **Licence L1.2**
**2ème semestre 2011/2012** | **Algèbre 1**

## TD 1 : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

**Exercice 1.** Dessiner les ensembles suivants, et dire s'il s'agit de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

- $B_1 = \{(x, y) \mid x = 1\}$
- $B_2 = \{(x, y) \mid x > y\}$
- $B_3 = \{(x, y) \mid x = 2y\}$
- $B_4 = \{(x, y) \mid x^2 = y\}$
- $B_4 = \{(x, y) \mid xy = 0\}$
- $B_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$
- $B_5 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q}\}$

**Exercice 2.** Pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^3$, préciser (en le justifiant) s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel:

- $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z = 0\}$
- $A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z \geq 0\}$
- $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z = 4\}$
- $A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 5z = 0 \text{ et } x - y = 0\}$
- $A_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\}$
- $A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max(x, y, z) = 0\}$
- $A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 2y - 5z)^2 + (x - y)^2 = 0\}$
- $A_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + 2y - 5z)(x - y) = 0\}$

**Exercice 3.** Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liés ? Justifier.

1. $\{(1, 1)\}$
2. $\{(4, 2),\ (2, 1)\}$
3. $\{(3, 2),\ (1, 5)\}$
4. $\{(1, 0),\ (-1, 1)\}$
5. $\{(0, 0),\ (1, 10)\}$
6. $\{(1, 2),\ (\pi, 2\pi)\}$
7. $\{(1, 1),\ (0, 1),\ (1, -1)\}$
8. $\{(1, 0, 1),\ (0, 1, 0)\}$
9. $\{(1, 1, 1),\ (0, 0, 0)\}$
10. $\{(1, 0, 1),\ (0, 1, 0),\ (1, 1, 1)\}$
11. $\{(1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1)\}$
12. $\{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$
13. $\{(1, 2, 3),\ (4, 5, 6)\}$
14. $\{(1, 0, -2),\ (0, 2, 1),\ (-2, 0, 4)\}$

**Exercice 4.** Reprendre les familles de l'exercice 3. Sont-elles des familles génératrices de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 5.** Montrer que le vecteur $(5, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 0)$.

**Exercice 6.** Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (2,3,-1), \quad u_2 = (1,-1,-2), \quad v_1 = (3,7,0), \quad v_2 = (5,0,-7), \quad v_3 = (0,0,1).$$

- Soit $F_1$ l'espace vectoriel engendré par $u_1$ et $u_2$. Est-ce que $v_1, v_2$ et $v_3$ appartiennent à $F_1$ ?
- Soit $F_2$ l'espace vectoriel engendré par $v_1$ et $v_2$. Montrer que $F_1 = F_2$.

**Exercice 7.**

- Montrer que la famille de vecteurs $\{(1,1,1),\ (-1,1,0),\ (1,0,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $(1,0,0),(1,0,1)$ et $(0,0,1)$ dans cette base.
- Montrer que la famille de vecteurs $\{(1,0,1,0),\ (1,-1,2,1),\ (-1,1,-1,-2),\ (0,-1,-1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Exprimer les coordonnées du vecteur $(1,2,2,3)$ dans cette base.

**Exercice 8.** Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivants:

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$
- $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } x = y\}$
- $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$
- $D = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z + t \text{ et } x + y - z + t = 0\}$

**Exercice 9.** Soit $a$ un réel. On pose $u = (a,1,1), v = (1,a,-1)$ et $w = (1,-1,0)$.

1. Trouver les valeurs de $a$ possibles pour que $\{u,v,w\}$ soit une famille liée, et donner dans ce cas une base de $E = \text{Vect}(u,v,w)$.
2. Donner une base et la dimension de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et de $F \cap E$.

**Exercice 10.** On pose $u = (a,b,c),\ v = (a',b',c')$ et $w = (a'',0,0)$. Montrer que $\{u,v,w\}$ est une base si et seulement si $a'', b'$ et $c$ sont non nuls.