Université Marne la Vallée **Licence L1.2**
2ème semestre 2011/2012 **Algèbre 1**

TD 2 : Espaces vectoriels

Exercice 1.

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle. (($\mathbb{R}^2, +$) est un groupe commutatif)

   (a) On considère l'opération externe suivante : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) & \mapsto & \alpha.(x, y) = (\alpha x, 0) \end{array}$

   $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

   (b) Même question si l'opération externe est : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\alpha, (x, y)) & \mapsto & \alpha.(x, y) = (x, \alpha^2 y) \end{array}$

2. Soit $H = \{a + b\sqrt{2} \; ; \; (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$

   (a) Montrer que $(H, +)$ est un groupe commmutatif.
   (b) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{Q} \;\; \forall x \in H \;\; \lambda x \in H$.
   (c) H est-il un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?
   (d) Peut-on munir H d'une opération externe sur $\mathbb{R}$ telle que H soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

3. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle et de l'opération externe sur $\mathbb{C}$ définie par :

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

   Montrer que $\mathbb{R}^2$ est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Soit A un ensemble et $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessous est un espace vectoriel.
Pour $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$, $x \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles suivants de E en sont-ils des sous-espaces vectoriels?

1. $E_1 = \{f \in E, \; f(1) = 0\}$
2. $E_2 = \{f \in E, \; f(-1) = 1\}$
3. $E_3 = \{f \in E, \; f(2) \geq 0\}$
4. $E_4 = \{f \in E, \; f(0) = f(1) = 0\}$
5. $E_5 = \{f \in E, \; f \text{ est paire}\}$
6. $E_6 = \{f \in E, \; f \text{ est impaire}\}$
7. $E_7 = \{f \in E, \; f \text{ est continue}\}$
8. $E_8 = \{f \in E, \; f \text{ est dérivable}\}$
9. $E_9 = \{f \in E, \; f \text{ est bornée}\}$,
10. $E_{10} = \{f \in E, \; f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\}$
11. $E_{11} = \{f \in E, f \text{ périodique de période } T\}$
12. $E_{12} = \{f \in E, \; f \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = l\}$
13. $E_{13} = \{f \in E, \; f \text{ continues sur } [0, 1] \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
14. $E_{14} = \{f \in E, \; \forall x, f(x) = f(x + 1)\}$
15. $E_{15} = \{f \in E, \; f \text{ deux fois dérivables et } f'' = f\}$

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites de nombres réels.

1. Montrer que l'ensemble des suites qui convergent vers zéro est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel.
3. L'ensemble des suites convergentes est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- $E_1 = \{P \in E, \; X^2 + 1 \text{ divise } P\}$.
- $E_2 = \{P \in E, \; P(1) = 0 \text{ ou } P(-1) = 0\}$.
- $E_3 = \{P \in E, \; \deg(P) \leq 2 \text{ et } P(0) = P(1) = 0\}$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{C}$ (que l'on considérera comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel puis comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel). Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

- $E_1 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ z + \overline{z} = 0\}$.
- $E_2 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. A quelle condition $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E. Justifier.
3. Montrer que $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $F \cup G$.

Exercice 8. Démontrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x^4) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\pi x) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x}{1+x^4} \end{array}$$

Que dire de la famille $\{f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3 - f_4, f_4 - f_1\}$?

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 de base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. On considère les vecteurs de E suivants : $u_1 = e_1 + e_2 + 4e_4$, $u_2 = 3e_1 - e_2 + 6e_3 + 2e_4$ et $u_3 = -2e_1 + 3e_3 + 3e_4$.
Le vecteur $v = e_1 + 3e_2 - 9e_3 + 3e_4$ appartient-il $F = vect(u_1, u_2, u_3)$? Déterminer une base de F. Dans le cas où $v \in F$, déterminer les coordonnées de v dans cette base.

Exercice 10. On suppose que u_1, u_2, u_3 et u_4 des vecteurs libres d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

1. $\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_4, u_4 - u_1\}$.
2. $\{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1\}$.
3. $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2 + u_3 + u_4\}$.

Exercice 11.

1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3), les polynômes suivants forment-ils un système libre?
$$\begin{array}{ll} P_1(X) = X(X-2)(X-4), & P_2(X) = X(X-4)(X-6), \\ P_3(X) = X(X-2)(X-6) \quad \text{et} & P_4(X) = (X-2)(X-4)(X-6). \end{array}$$
2. Même question avec les polynômes :
$$Q_1(X) = (X-5)^3, \ \ Q_2(X) = (X-5)^2(X-3), \ \ Q_3(X) = (X-5)(X-3)^2, \ \text{et } Q_4(X) = (X-3)^3.$$
Ce système est-il générateur ?

Exercice 12. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ x - 2y = 0\}, & F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ y = 0, \ x = z\} \\ G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x = 0\}, & H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ z = 0\} \\ I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ x + y - z = 0, \ x = y\} \quad \text{et} & J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \ x = y = z + t, \ x + y - z + t = 0\} \end{array}$$

1. Déterminer une base et la dimension de E F, G, H, I et J.
2. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$, $F \cap H$, $G \cap H$, $F + G$, $F + H$ et $G + H$.
3. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$ et $(F + G) \cap (F + H) \neq F + (G \cap H)$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit l'ensemble suivant:
$$F + G = \{x + y \ t.q. \ x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

1. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de F et $\{f_1, \cdots, f_q\}$ une base de G. Montrer que $\{e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_p\}$ est un système générateur de $F + G$.
3. En déduire que $dim(F + G) \leq dim(F) + dim(G)$.
4. Montrer que si $dim(F + G) = dim(F) + dim(G)$, alors $F \cap G = \{0\}$.