TD 5 : Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$f_1 = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_2 = 2e_1 - e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f_3 = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (f_1, f_2, f_3). Calculer l'inverse de cette matrice.
3. Calculer les coordonnées de $e_1 + e_2 + e_3$ dans la base (f_1, f_2, f_3).

Exercice 2. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$u(e_1) = 3f_1 - f_2 + 3f_3, \quad u(e_2) = -2f_1 - 2f_2, \quad u(e_3) = -2f_2 + f_3, \quad u(e_4) = f_1 + 2f_3.$$

Ecrire la matrice de u dans les bases canoniques.

Exercice 3. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par:

$$f(x, y, z, t) = (t, x, y, z).$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (au départ et à l'arrivée).
2. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Exercice 4. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par:

$$f(x, y, z, t) = (ax + by + t, bx + ay + z, y + az + bt, x + bz + at).$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (au départ et à l'arrivée).
2. On considère les 4 vecteurs $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $v_3 = (-1, -1, 1, 1)$ et $v_4 = (1, -1, -1, 1)$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Écrire les images de v_1, v_2, v_3 et v_4 par f, dans la base canonique, puis dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).
4. Écrire la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4) (au départ et à l'arrivée).
5. Écrire la matrice de passage P de la base canonique dans la base (v_1, v_2, v_3, v_4).
6. Vérifier vos calculs à l'aide d'une formule du cours, après avoir inversé P.

Exercice 5. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id})$.
2. Monter que $\mathrm{Im}(f - 6\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.
3. Choisir un vecteur non nul x dans $\mathrm{Ker}(f - 6\mathrm{Id})$ et un vecteur non nul y dans $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. Montrer que $(x, y, f(y))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soit x un vecteur non nul de E. On note F_x le sous-espace de E engendré par x et $f(x)$.
   (a) Pour tout élément y de F_x, montrer que $f(y)$ est aussi dans F_x.
   (b) Montrer que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants.
   (c) Quelle est la dimension de F_x?
2. Soit z un vecteur non nul de E qui n'est pas dans F_x.
   (a) Montrer que les 3 vecteurs x, $f(x)$ et z sont linéairement indépendants.
   (b) On suppose désormais que E est de dimension 4. Montrer que les 4 vacteurs x, $f(x)$, z et $f(z)$ forment une base de E.
   (c) Écrire la matrice A de f dans cette base (au départ et à l'arrivée).
   (d) Calculer A^2 puis A^n pour tout entier n.