TD 7 : Déterminants

Exercice 1.

1. Calculer les déterminants suivants :

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} \ \left(\begin{array}{c} j : \textit{racine cubique} \\ \textit{de l'unité} \end{array} \right)$$

2. Montrer que : $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos 2a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos 2b & \cos^2 b \\ \sin^2 c & \cos 2c & \cos^2 c \end{vmatrix} \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \cos b & \sin a \sin b \\ -\sin a & \cos a \cos b & \cos a \sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} \ (i^2 = -1) \qquad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Montrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

est un entier divisible par 13.
(On remarquera que 169, 1300, 1313 et 5265 sont des multiples de 13).

Exercice 4. (Examen de juin 2005)

1. Montrer, <u>sans calculs</u>, que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

2. On considère la matrice : $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$

   (a) Sans calculs, déterminer $\det A(1)$ et $\det A(-1)$. (Justifier)

   (b) Développer $\det A(x)$ et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\det A(x) = 0$.

Exercice 5.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
   Montrer que $\det M = 0$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, n impair, telle que ${}^tM = -M$. Montrer que $\det M = 0$.

Exercice 6. Montrer que $\forall n \geq 3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & \dots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 7. Soit pour $\forall n \geq 2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. $\forall n \geq 2$ établir une relation entre $\Delta_n,\ \Delta_{n-1}$ et Δ_{n-2}.

2. Montrer que $\forall n \geq 3,\ \Delta_n - \Delta_{n-1}$ est indépendant de n. En déduire $\Delta_n \quad \forall n \geq 2$.

Exercice 8. Résoudre l'équation suivante d'inconnue x :

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 9. Démontrer que le déterminant

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

est un polynôme de la variable x_3.
Quel est son degré ? son coefficient dominant ?
Déterminer ses racines et en déduire que :

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

Généraliser ce qui précède et calculer le déterminant de *Vandermonde* :

$$V_n(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & & \\ 1 & x_{n-1} & \dots & \dots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & \dots & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$