

Modèles pour la transition fluide/solide dans les écoulements gravitaires en couche mince



Christelle Lusso^a, François Bouchut^b, Alexandre Ern^a

^aCERMICS, Université Paris-Est, Ecole des Ponts, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Champs-sur-Marne
^bLAMA, CNRS & Université Paris-Est, 5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne

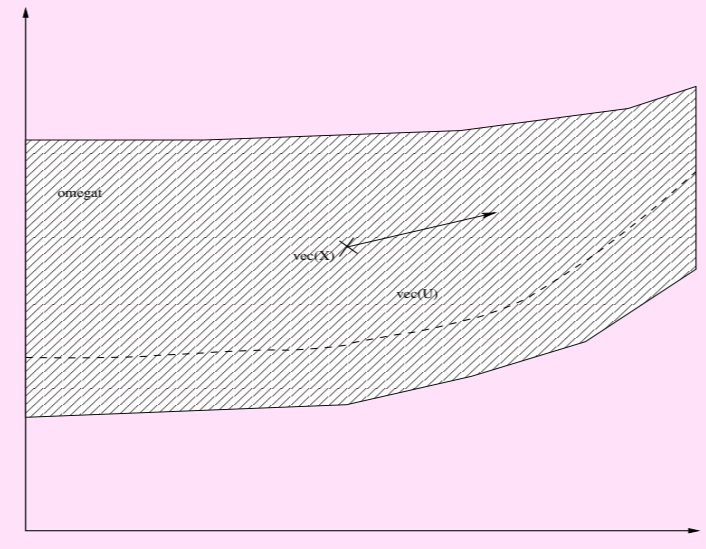


Présentation du modèle

L'étude de la transition fluide/solide dans la modélisation des écoulements de débris se fait par le biais d'une dynamique en couche mince avec une partie inférieure immobile constituant la phase solide du matériau et une partie supérieure mobile constituant la phase fluide. L'ensemble de ces deux phases occupe le domaine Ω_t délimité au fond par une topographie fixe et au sommet par une surface libre.

Les équations du modèle sont les suivantes:

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U} = 0 \text{ pour } \vec{X} \in \Omega_t, \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{U} + \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{P} = -\vec{g} \text{ pour } \vec{X} \in \Omega_t, \end{cases}$$



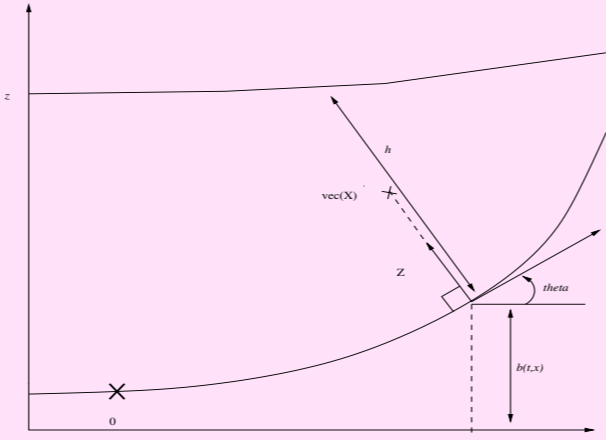
où $P = pId - (\nu D\vec{U} + k \frac{D\vec{U}}{|D\vec{U}|})$ avec p la pression ν la viscosité, k la plasticité, et le tenseur des déformations $D\vec{U} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} + \nabla^t \vec{U})$. On considère la loi rhéologique de Drucker-Prager qui correspond à $k = \sqrt{2}\lambda\mu$ avec $\lambda > 0$.

Avec pour donnée initiale et conditions aux limites:

- $\vec{U}(0, \vec{X}) = U^0(\vec{X})$,
- $\vec{U} = 0$ au fond,
- $P \cdot \vec{N} = 0$ à la surface libre où \vec{N} est un vecteur normal à la surface.

Topographie et système de coordonnées

Afin de décrire l'évolution du domaine, on représente par $h(t, x)$ l'épaisseur de la couche fluide dans la direction normale à la topographie $z(x)$ supposée assez régulière avec $\theta(x)$ l'angle entre l'axe Ox et le vecteur tangent à la topographie. Un point \vec{X} du domaine a pour coordonnées $(x - Z \sin \theta(x), z(x) + Z \cos \theta(x))$ où $X(x)$ est une variable curviligne mesurant la longueur de l'arc le long de la topographie. Ainsi, les équations s'écrivent en coordonnées curviligne et normale (X, Z) pour $0 < Z < h(t, x)$.



Simplification du modèle

Un développement asymptotique du modèle introduit dans [1]-[2]-[4] permet d'obtenir des équations simplifiées où S est un terme couplé de façon non linéaire à p et $b(t, X)$ est l'épaisseur de la couche solide. Ce qui donne les équations suivantes:

$$\begin{cases} \partial_t U - \text{sgn}(\theta) S(t, X, Z) - \partial_Z (\nu \partial_Z U) = 0 \text{ pour } Z > b(t, X), \\ S(t, X, Z) = -g \text{sgn}(\theta) (\sin \theta + \partial_X (h \cos \theta)) - \lambda \partial_Z p, \\ p = g (\cos \theta + \sin \theta \partial_X h - 2 |\sin \theta| \frac{\partial_X U}{|\partial_Z U|}) (h - Z), \\ U(t, X, b(t, X)) = 0 \text{ et } \partial_Z U(t, X, b(t, X)) = 0. \end{cases}$$

Modèle simplifié avec terme source empirique

On considère un problème modèle afin d'étudier l'évolution de la vitesse en fonction du terme source S , en gardant les conditions aux limites qui permettent de décrire l'évolution de b et en ne tenant pas compte de la dépendance en X . Plus précisément, soit $S(t, Z)$ tel que $\partial_Z S \leq 0$ et $h > 0$, on considère:

$$\begin{cases} \partial_t U + S - \nu \partial_Z^2 U = 0 \text{ pour } b(t) < Z < h, \\ \partial_Z U(t, h) = 0, \\ U(t, b(t)) = 0, \\ \partial_Z U(t, b(t)) = 0, \\ U(0, Z) = U^0(Z) \text{ où } \partial_Z U^0 > 0. \end{cases}$$

Sous condition de régularité et tant que $S(t, b(t)) \neq 0$ on peut obtenir une équation explicite donnant l'évolution de b :

$$\dot{b}(t) = \left(\frac{\partial_Z S(t, b(t)) - \nu \partial_Z^3 U(t, b(t))}{S(t, b(t))} \right) \nu. \quad (1)$$

Etude du cas non visqueux

Quand $\nu = 0$ on obtient l'équation

$$\partial_t U + S = 0,$$

pour $b(t) < Z < h$ avec comme conditions:

- $U(t, b(t)) = 0$,
- $\partial_Z U > 0$,
- $S(t, b(t)) \geq 0$,

de plus on suppose que $\partial_Z S < 0$ et que $S(t, \cdot)$ a un zéro $b^*(t)$ vérifiant $b(t) < b^*(t)$.

En particulier si $b(t)$ croissant, en intégrant sur $[0, t]$ pour $b(t) < Z < h$ on trouve la formule

$$U(t, Z) = U^0(Z) - \int_0^t S(\tau, Z) d\tau.$$

Solutions analytiques

Exemple 1: (b^* constant \Rightarrow arrêt progressif)

- $U^0(Z) = A(Z - b^0)^\alpha$, $A > 0$,
- $S(t, Z) = B(b^* - Z)$, $B > 0$,

Cas $\alpha = 1$: (profil linéaire)

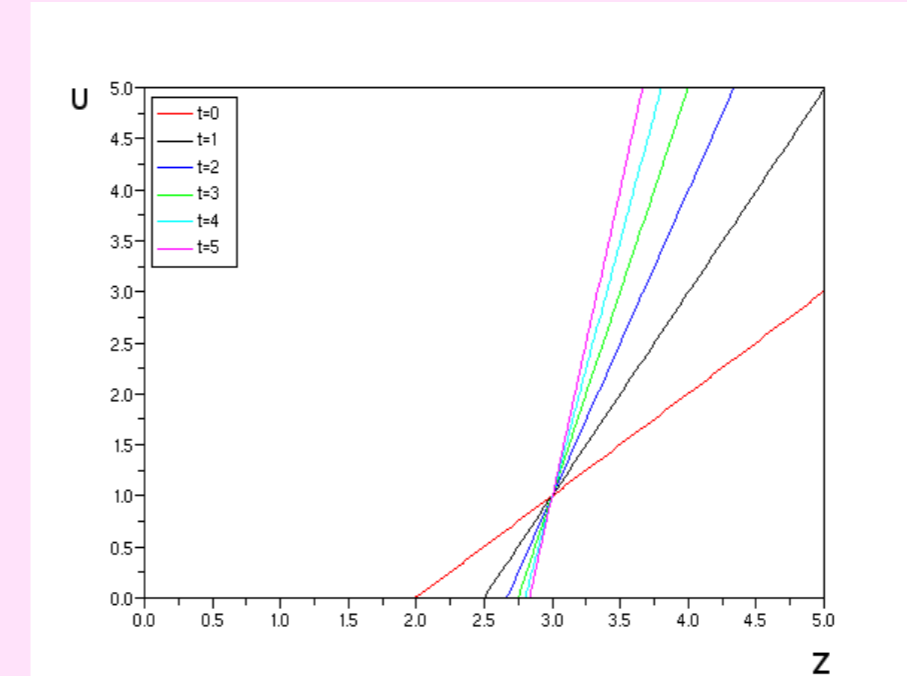
- $U(t, Z) = (A + Bt)(Z - b(t))$,
- $b(t) = \frac{Ab^0 + tBb^*}{A + Bt}$.

Cas $\alpha = 2$: (profil quadratique)

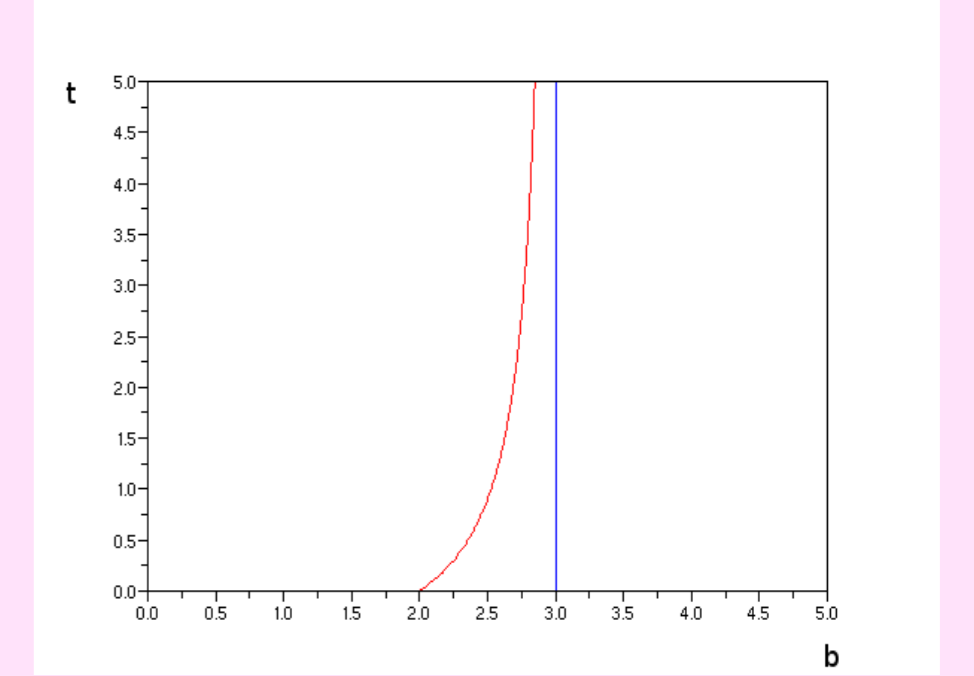
- $U(t, Z) = AZ^2 + (-2Ab^0 + t)Z + A(b^0)^2 - tb^*$,
- $b(t) = \frac{2Ab^0 - t + \sqrt{t^2 + 4At(b^* - b^0)}}{2A}$.

Solutions analytiques (suite)

Dans les deux cas on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} b = b^*$, ce que montrent les représentations graphiques suivantes pour $\alpha = 1$: $A = B = 1$, $h = 5$, $b^0 = 2$ et $b^* = 3$.



Profils de vitesse de $t = 0$ à $t = 5$.



Evolution de l'épaisseur de la couche solide

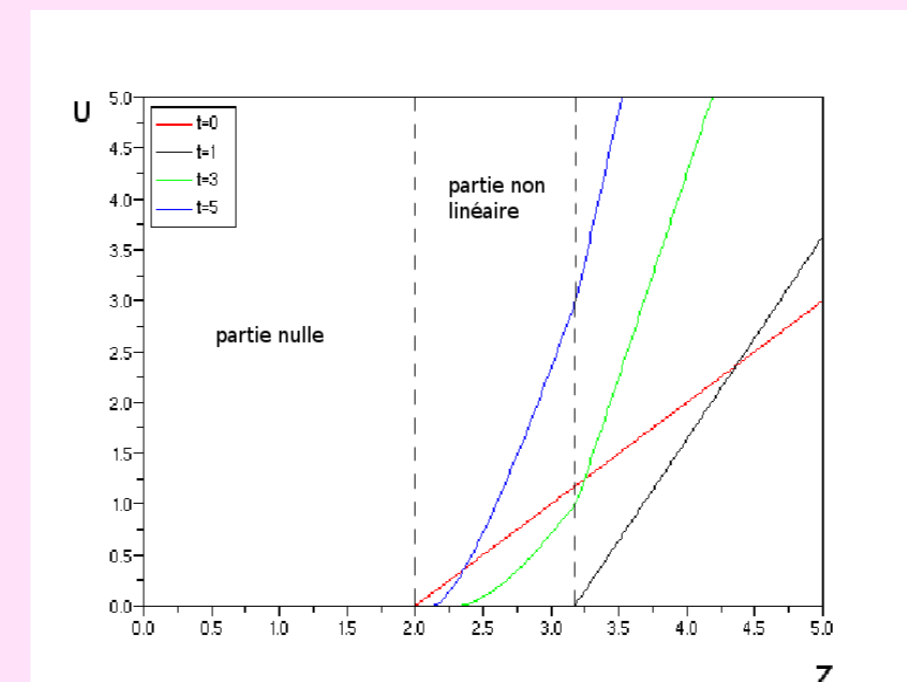
Exemple 2: (b^* décroît \Rightarrow démarrage progressif)

On prend $b^*(t) = \frac{b^0 t^2 + h}{t^2 + 1}$ décroissant et avec une intersection Z_0 entre b et b^* au temps t_0 . Pour $t < t_0$,

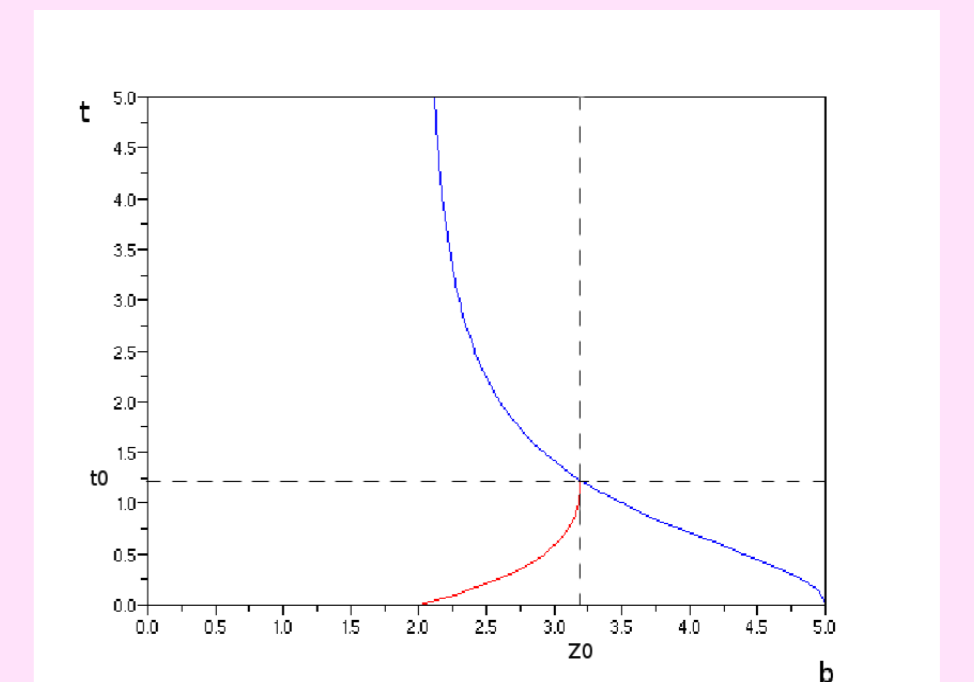
- si $b(t) < Z < h$, $U(t, Z) = -Ab^0 + (A + Bt)Z - Bb^0 t + B(b^0 - h) \arctan t$,
- $b(t) = \frac{Ab^0 + Bb^0 t + B(h - b^0) \arctan t}{A + Bt}$.

Pour $t \geq t_0$,

- si $Z > Z_0$, U inchangé
- si $b(t) < Z < Z_0$, $U(t, Z) = B(Z - b^0)(t - \sqrt{\frac{h-Z}{Z-b^0}}) - B(h - b^0)(\arctan(t) - \arctan(\sqrt{\frac{h-Z}{Z-b^0}}))$,
- $b(t) = b^*(t)$.



Profils de vitesse.



Evolution de b .

Exemple 3: ($b^0 > b^*$ \Rightarrow démarrage brutal)

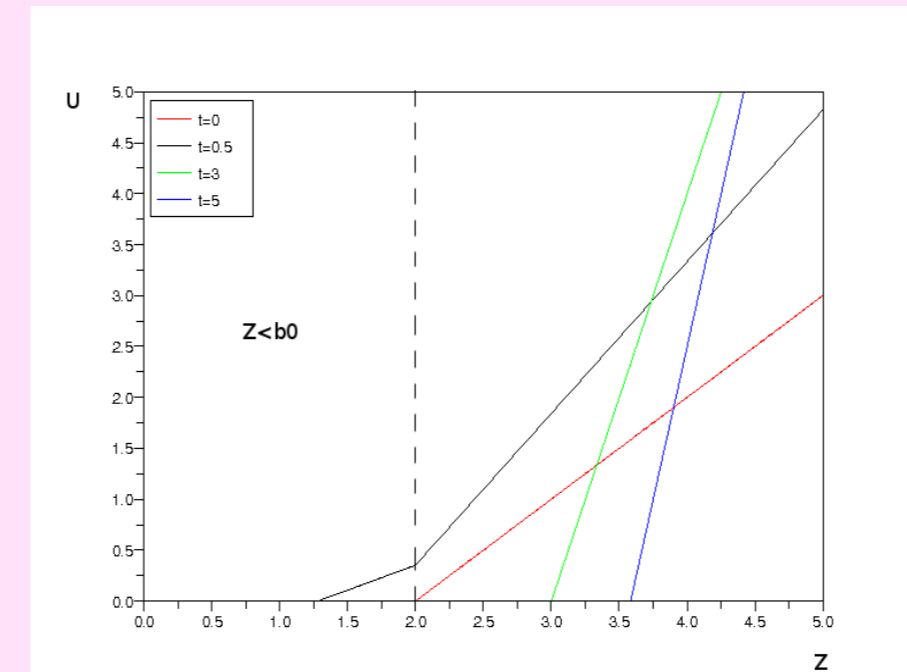
On choisit ici $b^*(t) = \frac{1+ht^2}{1+t^2}$ croissant tel que $b^*(0) = 1 < b^0 = 2$.

Pour $b^0 < Z < h$,

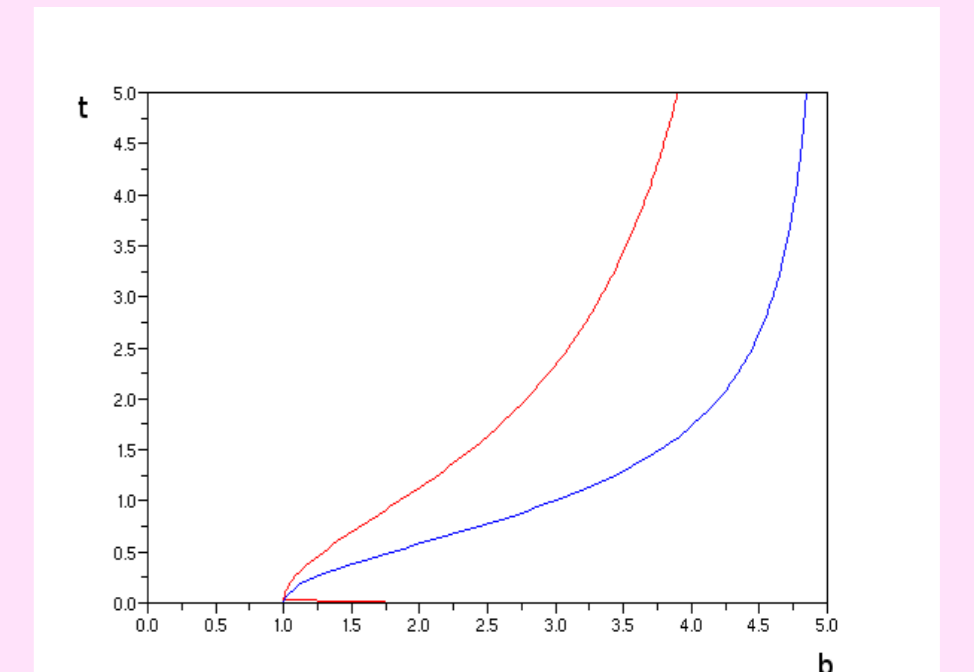
- $U(t, Z) = -Ab^0 + (A + Bt)Z - Bht + B(h - 1) \arctan(t)$.

Pour $Z < b^0$,

- $U(t, Z) = BtZ - Bht + B(h - 1) \arctan(t)$,
- $b(t) = \frac{Bht - B(h - 1) \arctan(t)}{Bt}$.



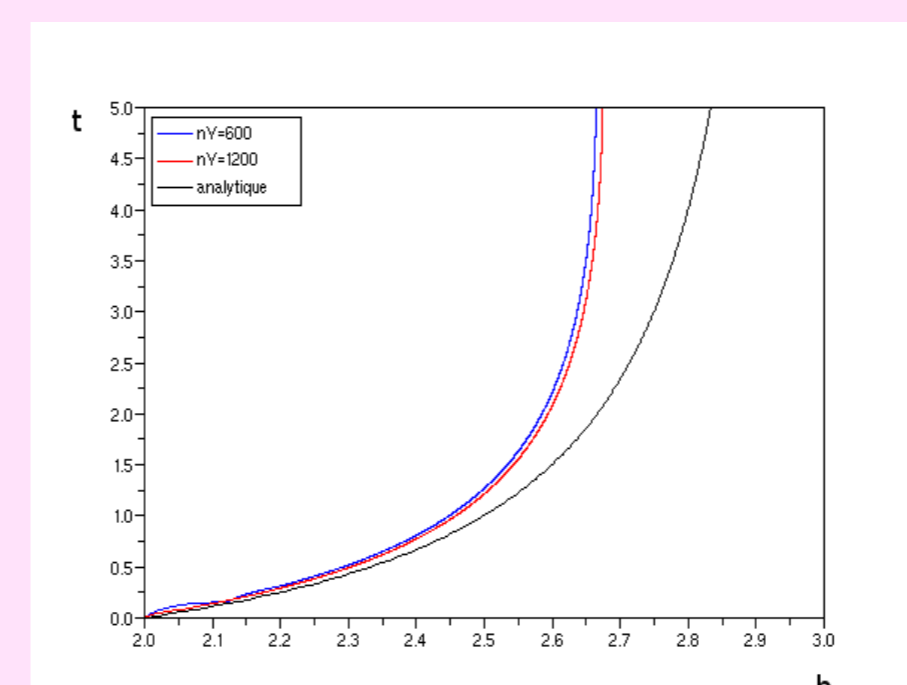
Profils de vitesse avec $b^{+0} = 1$.



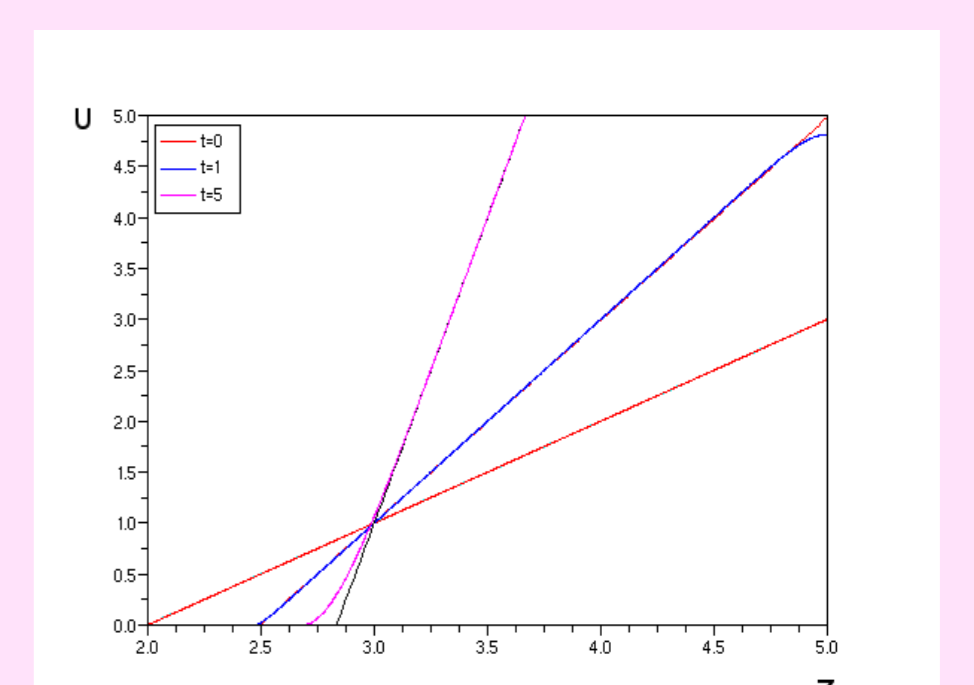
Evolution de b .

Passage à la limite numérique

On résout numériquement le système en utilisant l'équation différentielle sur b (1). Afin de discrétiser le modèle, le changement de variable affine $[b(t), h] \ni Z \mapsto Y \in [0, 1]$ où $Z = b(t) + Y(h - b(t))$ pour $0 < Y < 1$, permet de se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ et de simplifier les équations. On utilise un schéma aux différences finis explicite en temps et implicite pour le terme de diffusion. Prenons $\nu = 0.01$ puis $\Delta t = 0.01$ et $\Delta Y = 600$ pour les simulations.



Evolution de b pour $\nu_Y = 600$ et $\nu_Y = 1200$.



Profils de vitesse.

On retrouve une bonne approximation des solutions théoriques décrites précédemment (Exemple 1).

Conclusion

On a proposé un modèle simplifié pour étudier le phénomène de transition fluide/solide qui permet de décrire l'évolution de l'interface fluide/solide par l'intermédiaire de conditions aux limites surdéterminées. Ce modèle permet de représenter les situations géophysiques fondamentales qui sont: un arrêt progressif, un démarrage progressif forcé par la source et un démarrage brutal.

References

- [1] F. Bouchut, E.D. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, and P.-Y. Lagrée, *On new erosion models of savage-hutter type for avalanches*, Acta Mechanica (2008).
- [2] D. Bresch, E.D. Fernandez-Nieto, I. Ionescu, P. Vigneaux, *Augmented Lagrangian method and compressible visco-plastic flows: applications to shallow dense avalanches*, New directions in mathematical fluid mechanics, 57-89, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [3] I. Ionescu, *Onset and dynamic shallow flow of a viscoplastic fluid on a plane slope*, Journal of non-newtonian fluid mechanics 165 (2010).
- [4] C. Lusso, F. Bouchut, A. Ern, I. Ionescu, A. Mangeney, *article en préparation*.