

TD 3 : Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_1(x) = x^2$
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_2(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
- $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}; f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f_5(x, y) = 2x + 5y$
- $f_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_6(x, y) = (2x, 5y)$
- $f_7 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_7(x, y) = (2x + 5y, 3x)$
- $f_8 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_8(x, y) = (x^2, x + y)$
- $f_9 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; f_9(x, y, z) = x + y + z$
- $f_{10} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_{10}(x, y, z) = (x + y + z, y + z)$
- $f_{11} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; f_{11}(x, y, z) = (x + y + z, xyz)$
- $f_{12} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; f_{12}(x, y, z) = (2x + 5z, 2y + 5z, z)$

Exercice 2. Les applications suivantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p sont-elles linéaires ?

- $f_1(x, y, z) = (3x + 2y - z, x - y - 3z)$
- $f_2(x, y, z) = (x + y + z, xyz)$
- $f_3(x, y) = (2x + 3y, x)$
- $f_4(x, y) = (x^2, x + y)$
- $f_5(x) = (x, 2x)$
- $f_6(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$

Exercice 3. On considère les applications linéaires suivantes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Pour chacune d'elle, déterminer une base de l'image de f , le rang de f , une base du noyau de f ainsi qu'un système d'équation de l'image de f .

- $f(x, y) = (2x + y, 4x + 6y)$
- $f(x, y) = (x + y, 2x - y, -4x + 5y)$
- $f(x, y) = (3x + 2y + z, 2y + 5z)$
- $f(x, y, z) = (y, z, 0)$
- $f(x, y, z) = (x - y, x + z)$
- $f(x, y, z) = (x + 2z, -x + 4y + 10z, 2x + y + 7z)$
- $f(x, y, z, t) = (y - t, x + z, y - t, x + z)$
- $f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2x + y + 3t \\ -x + 3y + 4z + 2t \\ x + 4y + 4z + 5t \\ 7y + 8z + 7t \end{pmatrix}$
- $f(x, y, z, t, u) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2y + z + 2t + 3u \\ 2x + 2y + t + 3u \\ x + y + t + 2u \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Soit T l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $T(P) = P + P' + P''$.

- Montrer que T est une application linéaire.
- Montrer que T est injective et en déduire que T est bijective.

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = Q$ avec

$$Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X).$$

- Montrer que f est une application linéaire.
- Calculer $f(X^p)$; quel est son degré? En déduire $\ker f$, $\text{Im} f$ et le rang de f .

Exercice 6. Soit f une application linéaire de E dans F . Montrer que si f est bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est linéaire.

Exercice 7. On considère l'application:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, x + y).$$

- f est-elle linéaire ?
- Prouver que $f \circ f = 3(f - \text{Id})$.
- En déduire que f est inversible et calculer f^{-1} .

Exercice 8. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Montrer que f est de la forme suivante:

$$f(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z).$$

Exercice 9. Trouver une application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 telle que

$$f(1, 1, 0) = (1, 2, 1), \quad f(1, 0, 1) = (2, 1, 3), \quad f(1, 1, 1) = (4, 2, 1).$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f(x, y, z)$.

Exercice 10. A quelle condition sur a et b existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1, 1) = (1, 2), \quad f(1, 2) = (3, 6), \quad f(2, 3) = (a, b)?$$

Exercice 11. Soit, pour un réel α , l'application f_α de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par:

$$f_\alpha(x, y) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

- a) Montrer que f_α est linéaire.
- b) Montrer que $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha+\beta}$. En déduire que f_α est bijective.