TD 4 : Matrices

Exercice 1. Effectuer les opérations $A+B$, AB et BA dans les cas suivants:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère les 4 matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits 2 à 2 de ces matrices qui ont un sens? Effectuer ces produits.

Exercice 3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent (c'est-à-dire telles que $AB = BA$). Montrer la formule du binôme: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Que dire si A et B ne commutent pas?

Exercice 4. On considère les 3 matrices suivantes:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier les relations suivantes: $J^2 = K^2 = L^2 = -I$ et $KL = -LK = J$.
2. En déduire les relations: $LJ = -JL = K$ et $JK = -KJ = L$.
3. On considère $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I, J, K et L. Trouver une base et donner la dimension de $\mathbb{H}$.
4. Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication et que toute matrice non nulle de $\mathbb{H}$ est inversible.

Exercice 5. Quelles sont les matrices (2,2) A telles que $AM = MA$ dans les cas suivants:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas, peut-on toujours trouver α et β tels que $A = \alpha M + \beta I$?
Est-ce toujours vrai pour toute matrice M ?

Exercice 6. Calculer la transposée des matrices de l'exercice 2.

Exercice 7. Parmi les matrices de l'exercice 1, lesquelles sont inversibles?

Exercice 8. Calculer l'inverse des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 2 & -3 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2. En déduire A^{-1}. Vérifier en calculant A^{-1} avec la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer son inverse avec la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 11. Soit A une matrice de taille (n,n) telle que $A^2 = A$ et $A \neq I$.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Trouver toutes les matrices $(2,2)$ autres que I et O, telles que $A^2 = A$. Que peut-on dire de leurs lignes et de leurs colonnes?

Exercice 12. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. En déduire A^{-1} et A^n pour tout entier n.

Exercice 13. Soit A une matrice (n,n) telle que $A^2 = 2A - {}^tA$.

1. Montrer que $({}^tA)^2$ est combinaison linéaire de A et ${}^tA$.
2. Montrer que ${}^tA\,A = A\,{}^tA$.