TD 6 : Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants. Donner la structure de l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x - 7y - 8z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \\ 2x - 7y - 8z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z - t = 0 \\ 3x - y + z + 2t = 3 \\ x + 2y + 3z + 4t = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 3z + t = -1 \\ 4x + y - t = 2 \\ 3x + 2y + z + t = 5 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Dans le plan réel, déterminer :

1. les triangles ayant pour milieu des côtés: $A(1,0)$ $B(0,0)$ $C(0,1)$.
2. les quadrilatères ayant pour milieu des côtés: $A, B, C,$ $D(1,1)$.

Exercice 3. Quelle valeur donner à a pour que le système n'admette pas de solution?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + ay - 4z = 2 \end{cases}$$

Exercice 4. Déterminer a, b, c pour que les systèmes admettent une et une seule solution:

$$\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x - 2y = b \\ 3x + 2y = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y = a \\ -x + y = b \\ 3x - 2y = c \end{cases}$$

Exercice 5. Soit $m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs des paramètres m, α, β:

$$\begin{cases} mx - 2y = 0 \\ x - (m+1)y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + y + z = \alpha \\ x + my + z = \beta \end{cases}$$

Exercice 6. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et ϕ l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} \phi(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \phi(e_2) = 2e_1 + e_2 + 3e_3 \\ \phi(e_3) = 4e_1 + 4e_2 - 2e_3 + 10e_4 \\ \phi(e_4) = e_1 - e_2 + 2e_3 + 2e_4 \end{cases}$$

1. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.
2. Quel est le rang de ϕ?
3. Les vecteurs suivants sont ils dans $\mathrm{Im}(\phi)$? le cas échéant décrire $\phi^{-1}(u)$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$$

où $j = e^{2i\pi/3}$, et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systémes paramétrés suivants.

$$\begin{cases} ax + a^2y - (a^2+1)z = 0 \\ x + (a+1)y - az = 0 \\ x + (2a+1)y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + (m-1)y + z = 0 \\ 2mx + my - (4-m)z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 9. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2\times 1 - 1 \\ 2\times 2 - 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2(n-1) - 1 \\ -(n-1)^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ n-1 & & & \ddots & 2 & 1 & 0 \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i} k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Résoudre le système ayant pour matrice et second membre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ n-1 & & & \ddots & 2 & 1 & \alpha \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{i} k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k \end{pmatrix}$$

Discuter en fonction des valeurs du paramètre α.